

现代信用风险模型的统一性分析

王毅春, 孙林岩

(西安交通大学管理学院, 710049, 西安)

摘要: 从概念背景、建模基础及数学表达方式上对现今国际上信用风险管理实践中应用最为广泛的 KMV、CreditMetrics、CreditRisk⁺、Portfolio View 模型进行了比较研究,发现其不仅有相同的概念背景——Black-scholes 的定价理论和相同的模型构建基础——Merton 定价模型,而且还可以用统一的 Bernoulli 混合模型来表示,即各个模型均遵循由独立 Bernoulli 随机变量构成的违约分布,表明了现代风险模型的内在统一性。因此,这一特性对中国的商业银行构建信用风险模型具有指导意义。

关键词: 信用风险;模型;统一性

中图分类号: F270 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)01-0110-04

Oneness of Modern Credit Risk Models

Wang Yichun, Sun Linyan

(School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on the concept background, modeling basis and mathematical formation, a systematic comparison among KMV, CreditMetrics, CreditRisk⁺ and PortfolioView is carried out, which are the worldwide models for credit risk management. It is found that the mentioned models are endowed with the same concept background of the pricing theory of Black-scholes and the structural foundation of Meton's pricing model, they even can be described by the unified Bernoulli mixed model, and each of the models is compatible with the distribution composed of the Bernoulli random variables. The intrinsic uniformity provides a guidance to construct for the credit risk model of Chinese business bank.

Keywords: credit risk; models; oneness

在经济金融全球化的背景下,银行业的开放程度正在逐步增加,如何有效防范金融风险,是我国银行业参与国际金融活动面临的重大课题。经过3次征求意见的《新巴塞尔资本协议》于2006年正式实施,反映了当今先进的风险管理技术和监管理念与实践,为商业银行建立风险管理体系指明了方向。新巴塞尔协议的核心内容是全面提高风险管理水平,准确识别、计量和控制风险。对于信用风险,新巴塞尔协议要求银行建立自己的内部信用风险度量模型,因此有必要对当前国际上流行的信用风险管理模型和技术方法作系统的研究和比较。目前,信用风

险模型的研究在我国刚刚起步,已有学者就模型本身及方法作了一些介绍和比较研究。本文对国际上信用风险管理实践中应用最为广泛的 KMV、CreditMetrics、CreditRisk⁺、Portfolio View 模型进行了比较,对其概念背景、建模基础以及模型的数学表示等进行了初步探讨,揭示了现今信用风险模型的统一性。

1 概念背景——均始于 Black-Scholes 定价理论

1973年,Fischer Black和Myron Scholes将物理

学中的布朗运动概念引入了金融学,根据这一概念,股票价格 S 服从如下随机过程^[1]

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz, dz = \varepsilon(dt)^{1/2}$$

式中: μ 是股票价格的预期收益率; σ 为股票价格的波动率; ε 为标准正态分布中抽取的一个随机值.借助 Ito 定理,Black 和 Scholes 发现了对衍生产品的估值价格

$$f = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{r} + \frac{\partial f}{\partial S} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \frac{1}{r} \sigma^2 S^2 \quad (1)$$

式中: r 是无风险收益率.

由于式(1)中不存在反映投资者风险偏好的变量,所以此微分方程是风险中性的. Black-Scholes 等式被称为一种无套利的风险中性附带要求权的定价方法,满足式(1)Black-Scholes 欧式期权公式,并对于买入期权

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/Ke^{-rT}) + (1/2)\sigma_E^2 T}{\sigma_E T^{1/2}}, d_2 = d_1 - \sigma_E T^{1/2}$$

式中: N 代表累积正态分布; K 为执行价格; σ_E 表示股权的波动性; T 为期权的期限.

2 构建基础 Merton 的定价模型

1974 年,Robert Merton 创建了一个估计公司违约概率的模型,他将一个简单的等式“股东权益(E)=资产(V)—负债(D)”和 Black-Scholes 的期权定价模型进行了组合^[2].从形式上看,Merton 模型和式(2)并无本质上的区别,只是对有关变量进行了定义,即

$$E = VN(d_1) - De^{-rT}N(d_2) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V/De^{-rT}) + (1/2)\sigma_V^2 T}{\sigma_V T^{1/2}}, d_2 = d_1 - \sigma_V T^{1/2}$$

式中: σ_V 表示资产的波动性.式(3)表明了股权所有者对公司资产有一个要求权,如果 V 增加, E 就会有无限的上升潜力.反过来,如果 D 超过了 V ,公司就会破产.在这种情况下,权益所有者要将剩余资产用于偿还部分债务,权益价值将是零,这种无限上升的潜力和无限下降的风险就是期权的原理.

Black-Scholes 模型中的执行买权的概率为 $N(d_2)$,这是该模型的一个著名性质.如果不执行买权的概率为 $N(-d_2)$,不执行买权意味着 D 大于 V ,这就是破产的情况,因此 Merton 框架中的违约概率就是 $N(-d_2)$.

Merton 模型的一个不足之处是需要将资产价值 V 和 σ_V 作为输入变量,而在实际中这 2 个参数都

不易获得,但 E 和 σ_E 可以观察到.由式(3)和 Ito 定理派生

$$N(d_1) = (\sigma_E/E)(V/\sigma_V) \quad (4)$$

就可以得到含 2 个未知量的 2 个方程,并解出 V 和 σ_V .式(3)表示的 Merton 模型在信用风险管理的实践中被作为很多模型的构建基础,本文讨论的 4 个模型中基础的 2 个模型 KMV 的 Portfolio manager、JP 摩根的 CreditMetrics 都是这一类^[3-5].

3 贝努利(Bernoulli)混合模型

3.1 概念及定义

设一个组合由 m 个债务人构成,有固定的时间期限 $[t, t+\Delta t]$, Δt 一般是一年.假设在 t 时刻所有债项都处于不违约状态,令随机变量 y_i 为债务人 i ($1 \leq i \leq m$) 在 $t+\Delta t$ 期间的违约指示变量,值为 0 或 1,1 代表违约,0 代表不违约.由于损失只来源于违约事件,因此忽略级别水平被降低所带来的损失后,随机向量 $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_m)'$ 就是一定利息期间内组合的违约指示向量.

在混合模型中,一个债务人的违约概率被假定要依赖于一些公共变量的集合(一般这类集合都较小),这些公共变量被定义为宏观经济变量,而不同债务人对公共变量的违约是各自独立的. Bernoulli 混合模型的定义为:给定一个值 $p < m$, p 维随机向量 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_m)'$ 遵从由 Ψ 构成的贝努利混合模型.如果有函数 $Q_i: R^p \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq m$,则对 Ψ 的条件不变, $\mathbf{Y}$ 就是由满足 $P(y_i = 1/\Psi) = Q_i(\Psi)$ 的独立贝努利随机变量构成的向量^[6].

3.2 贝努利混合模型表示的 CreditRisk⁺

CreditRisk⁺ 模型可以用贝努利混合模型来表示,即

$$P(y_i = 1/\Psi) = Q_i(\Psi), Q_i(\Psi) = 1 - e^{-\mathbf{W}_i' \Psi} \quad (5)$$

式中: Ψ 是独立的 gamma 分布宏观经济因素的向量; $\mathbf{W}_i'$ 是公共因素的权重向量. CreditRisk⁺ 模型的这种表达式使得它便于与其他模型进行比较,但 CreditRisk⁺ 模型还是常用泊松混合模型来表示的.在这种更一般的表达中做如下假设,对 Ψ 的条件约束不变,债项 i 在 $[t, t+\Delta t]$ 期间发生违约是与其他债项独立的,其泊松强度

$$\Lambda_i(\Psi) = \mathbf{W}_i' \Psi \quad (6)$$

虽然这一假设可能使违约发生不只一次,但有一个可实现的校准方法能保证这种情况发生的概率极小.假设 $\Delta t = 1$,对一个债项在这个利息期间违约

(不论违约一次或更多)的条件概率为 $1 - e^{-W_i\Psi}$, 因此假设式(6)中隐含了式(5)中的贝努利混合模型。

CreditRisk⁺的泊松表达式中有一个令人满意的分析特性, 这就是组合违约数量的分布等于独立值为负的二项随机变量的和。

3.3 CreditMetrics 和 KMV 模型

KMV 和 CreditMetrics 模型被认为是来源于 Merton(1974)公司的价值模型, 它认为违约是当一个公司的资产价值低于它的负债价值时发生的。在这 2 个模型中, 设一个服从多元正态分布的随机向量 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)'$, x_i 为在某时间公司的潜在隐含变量。进一步假设 $\mathbf{X}$ 依赖于宏观经济因素, 并存在典型线性关系, 设想没有一般性的损失发生, 也就是 $\mathbf{X}$ 均值为 0, 若 $\mathbf{X}$ 可被表示成下式就是遵循一个 p 维($p < m$)的线性因素模型

$$X_i = a'_i \boldsymbol{\theta} + \sigma_i \varepsilon_i \quad (7)$$

式中: $\boldsymbol{\theta}$ 为 p 维 Gaussian 随机向量, $\boldsymbol{\theta} \sim N_p(0, \Omega)$, $\varepsilon_i (i=1, \dots, m)$ 是独立于 $\boldsymbol{\theta}$ 的标准正态分布随机变量; σ_i 和 a'_i 都是常数项。这个模型也可被有效地认为是与 $\mathbf{X}$ 相关矩阵的一种简化结构。

$(D_1, \dots, D_m)$ 为决定取舍的水平或者叫临界值, 如果 x_i 的值小于 D_i , 模型中的债务人就违约了, 即

$$y_i = 1 \Leftrightarrow x_i \leq D_i \quad (8)$$

KMV 和 CreditMetrics 模型均适用这个简单的结构, 两者之间的不同主要是在概念和校准方法上, 而不是结构上的不同。

在 KMV 模型中, X_i 代表企业资产价值(或者叫资产回报)的相对变动, 为了确定临界值 D_i , 采用期权定价技术计算基于历史公司资产价值数据的违约距离。CreditMetrics 模型经常被表示成一个多状态模型, 它不考虑某个单一的取舍值, 而是将 x_i 的取值范围分得很细, 表示成一个信誉递减的级别水平序列, 达到极值即违约, 发生这种级别转移的概率与历史数据一致。在这 2 个模型中, $\mathbf{X}$ 的线性因素结构都采用影响企业价值的一些共同的宏观经济变量来校准。

设 $\Psi = \boldsymbol{\theta}, \Psi$ 的条件不变, ε_i 是独立随机变量, y_i 是独立的, 而且

$$P(y_i = 1/\Psi) = P(x_i \leq D_i/\Psi) =$$

$$P(\varepsilon_i \leq (D_i - a'_i \Psi)/\sigma_i/\Psi) = \Phi(D_i - a'_i \Psi)/\sigma_i)$$

式中: Φ 是正态分布的密度函数。为引进常数项可将随机违约概率(混合模型另一种专门表示方式)表示成

$$Q_i(\Psi) = \Phi(c_i - W'_i \Psi) \quad (9)$$

3.4 其他可能形式

Frey 等人于 2001 年提出的 CreditMetrics 和 KMV 模型, 可以推广构建其他的隐含变量模型, 例如 $\mathbf{X}$ 不再是多元 Gaussian 分布, 而是来自多变量正规混合模型, 以及多变量 t 分布或多变量双曲线分布。设

$$\Psi = (W, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_p)', \boldsymbol{\theta} \sim N(0, \Omega)$$

W 是独立于 $\boldsymbol{\theta}$ 的正随机变量。贝努利混合模型的扩展形式为

$$P(y_i = 1/\Psi) = Q_i(\Psi); Q_i(\Psi) = \Phi(c_i W - W'_i \boldsymbol{\theta})$$

式中: c_i 和 W'_i 均为常数项。例如: 如果 vW^2 是自由度为 v 的 x^2 分布, 就可以得到一个等同于 CreditMetrics/KMV 类模型的混合模型, 它是由遵循线性因素模型得到的 student- t_v 分布的资产回报, 而不是 Gaussian 分布的资产回报。

在实际中, 另一个可能的贝努利混合模型形式为

$$P(y_i = 1/\Psi) = Q_i(\Psi), Q_i(\Psi) = \frac{e^{c_i - W'_i \boldsymbol{\theta}}}{1 + e^{c_i - W'_i \boldsymbol{\theta}}}$$

与式(9)不同的是, 正态分布函数 Φ 被 logistic 分布函数代替了, 用统计的语言描述就是将 Q_i 和 $c_i - W'_i \boldsymbol{\theta}$ 之间的概率关系用逻辑关系代替, 而 CreditPortfolioView 就是这种模型。

3.5 同类组合

上述 4 个模型最一般的形式可以用于各债务人违约概率不同、债务人之间违约关系不同所形成的不同质的组合。简化同质组合的形式, 能有助于从数学概念上更好地理解模型之间的差异, 实际中常常把大组合分割成少量的更利于模型校准的同质组。

对同质定义的正确数学表达是假设 $\mathbf{Y}$ 是可互换的(分布不变), 对 $(1, \dots, m)$ 的任意置换 $\Pi(1), \dots, \Pi(m)$, 有

$$(y_1, \dots, y_m) \stackrel{d}{=} (y_{\Pi(1)}, \dots, y_{\Pi(m)})$$

如果混合模型的函数 Q_i 都是相同的, 就可以得到一个可互换的贝努利混合模型。

引入随机变量 $Q := Q_1(\Psi)$, 对域为 $\{0, 1\}^m$ 的向量 $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_m)'$ 有

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}/Q) = Q \sum_{i=1}^m y_i (1-Q)^{m-\sum_{i=1}^m y_i}$$

特别当 $P(y_i = 1/Q) = Q$ 时, 可互换的模型从本质上可以认为是一般的多因素模型的单因素模型。

将各模型针对同质组模型中 Q 的分布总结如下。

$$(1) \text{CreditRisk}^+ \text{模型: } Q = 1 - e^{-Y}, Y \sim G_a(a, b)$$

是一个单变量 gamma 分布的因素,其密度为

$$f(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} \quad (10)$$

式中 a, b 是确定模型的参数.

(2) CreditMetrics/KMV 模型: $Q = \Phi(Z)$, $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 模型由 μ 和 σ 确定, Q 可认为是一个 probit-normal 分布, 在式(7)的隐含变量模型中, 本模型还等同于任意 2 个公司的 X_i 和 X_j 之间的相关系数都一致的情况, 相关系数 $\rho = \sigma^2 / (1 + \sigma^2)$.

(3) CreditMetrics/KMV 模型的 Frey-McNeil 扩展模型: $Q = \Phi(cW + Z)$, $Z \sim N(0, \sigma^2)$, 这个扩展模型有 c, σ 参数, 以及在 W 分布中需要确定的额外参数.

(4) CreditPortfolio View 模型: $Q = e^Z / (1 + e^Z)$, $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, Q 被认为是 Logit-normal 分布.

从(1)中可以发现, CreditRisk⁺模型的简写式本质上等同于将 Q 用带参数 a 和 b 的 beta 分布来构建模型. 在单变量 gamma 变量中, Q 的密度函数用式(10)的 gamma 密度函数表示为

$$g(q) = f(-\lg(1-q)/(1-q))$$

于是有

$$g(q) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} (-\lg(1-q))^{a-1} (1-q)^{b-1}$$

在现实的信用模型中, 参数 a, b 属于区间 $[0, 1]$ 左侧的集合, 对大多数信用级别来说违约都是一个稀少事件, 因为 q 值很小可以用 $-\lg(1-q) \approx q$ 来近似, 这样函数形式就非常接近 beta 分布的形式

$$g(1) = \beta(a, b)^{-1} q^{a-1} (1-q)^{b-1} \quad a, b > 0$$

这种用 beta 分布来表示一个 Bernoulli 损失率的混合分布的方法在统计学中是一种经典方法, 因此得到的混合模型也被证明是非常易于分析操作的.

4 结束语

由于基于同样的概念背景及建模基础, 目前模型的数学架构将产生非常接近的结果, 甚至可以用统一模型来表示, 因此反映了信用风险模型的统一性. 这一特性对我国商业银行构建信用风险模型具有指导意义, 由于模型的设计者不断地改进借鉴竞争者的优点, 可以预计的是模型概念上的差异会日益减少, 因此将来的研究会重点关注整合了市场风险、信用风险与操作风险的统一模型.

参考文献:

- [1] 约翰·赫尔. 期权、期货和其它衍生产品[M]. 张陶伟, 译. 北京: 华夏出版社, 2000: 188-357.
- [2] 迪迪埃·科森, 于格·皮罗特. 高级信用风险分析[M]. 殷剑峰, 王唯翔, 程炼, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2005: 16-22.
- [3] Meissner G, Nielsen K. Recent advances in credit risk management: a comparison of five models[J]. Trading & Regulation, 2002, 8(1): 76-93.
- [4] Gordy M B. A comparative anatomy of credit risk models[J]. Journal of Banking & Finance, 2000(24): 119-149.
- [5] Crouhy M, Galai D, Mark R. A comparative analysis of current credit risk models[J]. Journal of Banking & Finance, 2000(24): 59-117.
- [6] Frey R, McNeil A J. Var and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights[J]. Journal of Banking & Finance, 2002(26): 1317-1334.

(编辑 管咏梅)